О МНИМЫХ ОШИБКАХ ПОПРАВОК ИЗМЕРЕНИЙ

Б.Н. Дьяков (СПГГИ, Санкт-Петербург)

В 1966 г. окончил факультет геодезии НИИГАиК по специальности «астрономо-геодезия». Работал инженером на предприятиях № 9 (Свердловск) и № 1 (Иркутск). С 1978 г. — старший преподаватель, доцент, профессор кафедры геодезии СГГА. С 2002 г. по настоящее время — доцент Санкт-Петербургского государственного горного института (СПГГИ).

Входными данными уравнивания геодезической сети по методу наименьших квадратов (МНК) являются координаты (или отметки) исходных пунктов, проектное значение ошибки единицы веса μ_0, результаты измерений (вектор **Y**) и их средние квадратические ошибки (СКО) m_i или веса (весовая матрица **P**).

К выходным данным уравнивания относятся: вектор неизвестных **X**, ошибка единицы веса μ, матрица обратных весов неизвестных **Q**, вектор поправок измерений **V** и т. д. Используя эти данные, можно выполнить оценку точности любого параметра сети, и, если существуют два пути оценки точности, в обоих случаях должны получиться одинаковые результаты. Как показали наши исследования, этот тезис справедлив для всех параметров сети, за исключением уравненных значений измеренных величин. Известно, что одним из очевидных следствий уравнивания является повышение точности измерений. Так, в [1] приводится доказательство, что ошибки измерений после уравнивания уменьшаются в среднем в $\sqrt{k/n}$ раз (**n** — количество измерений, **k** — количество неизвестных).

Оценку точности уравненных измерений можно выполнить двумя путями. Рассмотрим их оба. Представим уравненные значения измерений как функции уравненных значений неизвестных:

$$Y_{i(ур)} = \varphi(X) \qquad (1)$$

и из этой формулы получим формулу СКО **i**-ого уравненного измерения:

$$m^2_{i(ур)} = \mu^2 \sum_1^k \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \sum_1^k \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} Q_{i,j}, \qquad (2)$$

где $Q_{i,j}$ — элементы матрицы **Q**; под знаком суммы стоят частные производные измерений по неизвестным, определяемым из уравнивания.

Рассмотрим небольшую нивелирную сеть, состоящую из одного исходного репера **A**, трех определяемых реперов **1**, **2**, **3** и шести нивелирных линий длиной по 1 км (см. рисунок); средняя квадратическая ошибка каждого измеренного превышения равна μ = 8 мм.

Пусть после уравнивания ошибка единицы веса равна ее проектному значению $\mu = \mu_0$ = 8,0 мм. Матрица **Q** этой сети приведена в табл. 1.

Вычислим для каждого уравненного превышения по формуле (2) СКО (m_h = 5,7 мм) и убедимся, что для всех превышений выполняется условие:

$$m_{i(ур)} < m_i,$$

что согласуется с очевидным следствием уравнивания, отмеченным выше.

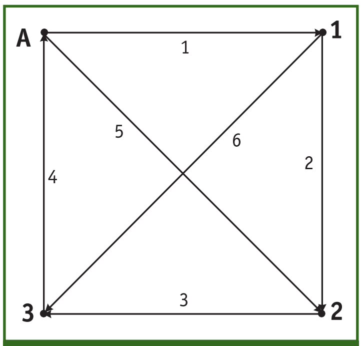

Схема нивелирной сети

Второй путь предусматривает вычисление средней квадратической ошибки уравненных превышений по формуле:

$$m_{i(ур)}^2 = m_i^2 + m_{vi}^2, \qquad (3)$$

где m_{vi} — СКО поправки в измерение.

Формула (3) соответствует вычислению уравненного превышения по формуле:

$$Y_{i(ур)} = Y_i + V_i. \qquad (4)$$

Ошибки поправок можно получить из ковариационной матрицы поправок:

$$K_V = \mu_0^2 Q_V, \qquad (5)$$

диагональные элементы которой являются квадратами средних квадратических ошибок поправок. Матрица обратных весов поправок вычисляется по формуле:

$$Q_V = P^{-1} - AR^{-1}A^T. \qquad (6)$$

Матрица Q нивелирной сети, представленной на рисунке — **Таблица 1**

Номер репера	1	2	3
1	0,500	0,250	0,250
2	0,250	0,500	0,250
3	0,250	0,250	0,500

Матрица $\mathbf{Q_v}$ для рассматриваемой нами нивелирной сети приведена в табл. 2.

При μ = 8 мм и $q_{i,i}$ = 0,500 получаем m_v^2 = 32 мм², и по формуле (3) вычисляем СКО уравненного превышения, равную 9,8 мм, т. е.:

$$m_{i(\text{ур})} > m_i,$$

что противоречит очевидному следствию, отмеченному выше.

Если в правой части формулы (3) второе слагаемое будет отрицательным, то значения $m_{i(\text{ур})}$, подсчитанные по формулам (3) и (2), окажутся одинаковыми. Такой же результат получается и при уравнивании неравноточной нивелирной сети, отдельного линейно-углового хода или системы ходов.

Квадрат действительного числа является положительным числом, а квадрат мнимого числа — отрицательным. Следовательно, ошибки поправок — числа мнимые, а их веса, подсчитанные по формуле:

$$p_{v_i} = \mu_0^2/m_v^2,$$

— числа отрицательные. С позиций элементарной теории ошибок данный вывод является парадоксальным, но он заслуживает внимания хотя бы потому, что его нужно объяснить.

К выводу о мнимых ошибках поправок измерений можно прийти и другим путем, анализируя известное матричное уравнение:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{G}\Delta, \qquad (7)$$

вывод которого приведен в [2, с. 175]. В этом уравнении Δ — вектор истинных ошибок измерений, $\mathbf{V}$ — вектор поправок из уравнивания, $\mathbf{G}$ — матрица размером **nxn**. В развернутом виде уравнение (7) записывается как **n**-выражений типа:

$$V_i = -\sum_j g_{i,j}\Delta_j, \qquad (8)$$

т. е. каждая поправка может быть представлена в виде суммы произведений элементов **i**-ой строки **G**-матрицы на истинные ошибки соответствующих измерений.

Матрица $\mathbf{Q_v}$ нивелирной сети, показанной на рисунке **Таблица 2**

Измерения	1	2	3	4	5	6
1	0,500	0,250	0,000	0,250	–0,250	0,250
2	0,250	0,500	0,250	0,000	–0,250	–0,250
3	0,000	0,250	0,500	0,250	0,250	–0,250
4	0,250	0,000	0,250	0,500	0,250	0,250
5	–0,250	–0,250	0,250	0,250	0,500	0,000
6	0,250	–0,250	–0,250	0,250	0,000	0,500

Известно, что матрица **G** вычисляется по формуле:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}, \qquad (9)$$

где **E** — единичная матрица размером **nxn**, **A** — матрица размером nxk коэффициентов параметрических уравнений поправок, **P** — диагональная матрица весов измерений, $\mathbf{R}^{-1}$ — ковариационная матрица неизвестных размером **kxk**, являющаяся обратной к матрице коэффициентов нормальных уравнений.

Из формулы (9) видно, что элементы **G**-матрицы зависят только от геометрии конкретного геодезического построения и весов измерений, поэтому правая часть выражения (8) не содержит элементов, которые можно было бы оценивать с помощью средних квадратических ошибок. Действительно, погрешность элементов **G**-матрицы существенно меньше точности вычислений поправок **V**, и их можно считать безошибочными. Истинные ошибки измерений по своей природе не содержат погрешностей; это — вполне конкретные, хотя и неизвестные нам числа. Ошибочны результаты измерений, которые оцениваются обобщенным показателем — средней квадратической ошибкой, но оценка точности истинных ошибок с помощью такого показателя смысла не имеет.

Считая поправку V_i функцией истинных ошибок измерений, мы вынуждены признать, что средняя квадратическая ошибка поправки из уравнивания также не имеет физического смысла, и, если в теории возникает необходимость оперировать средними квадратическими ошибками поправок, их следует считать мнимыми величинами.

В заключение необходимо отметить, что в учебниках по теории обработки измерений отсутствуют сведения о мнимых ошибках поправок измерений и их отрицательных весах. Этот пробел, по нашему мнению, следует устранить. Возможно, в теорию обработки измерений придется ввести понятия действительной и мнимой областей и указывать, к какой области относятся тот или иной случайный вектор и его корреляционная матрица.

Список литературы

1. Юршанский З.М. Теория математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие. — Новосибирск: НИИГАиК, 1984. — 130 с.

2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. — М.: Недра, 1989.

RESUME

It is marked that there is no information on the imaginary errors of the measurement corrections and their negative weights in the manuals of the theory of measurement. Evidence of them is proved by the calculations done. The author proposes to introduce notions of the actual and imaginary parts into the theory of measurement and to indicate which part this or that random vector and its correlation matrix is related to.