ГЕОПРОФИ 6'2013

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА БОЛЬШИЕ РАССТОЯНИЯ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

И.В. Оньков («Мобиле», Пермь)

В 1970 г. окончил геодезический факультет МИИГАиК по специальности «астрономогеодезия». После окончания института работал в Степногорском управлении строительства, с 1974 г. — в Пермском политехническом институте, с 1989 г. — в Горном институте УрО АН (Пермь), с 1993 г. — в Частном предприятии по созданию цифровых карт, с 1995 г. — в филиале «Госземкадастрсъемка» — ВИСХАГИ (Пермь), с 2000 г. — в Пермском филиале ООО «Недра» (Челябинск), с 2002 г. — в ООО «ПермНИПИнефть», с 2006 г. — в ООО «Тримм». С 2011 г. работает в ЗАО «Мобиле», в настоящее время — научный консультант. Кандидат технических наук.

Определение взаимного положения двух точек на эллипсоиде вращения — обратная геодезическая задача (ОГЗ), несмотря на трехвековую историю исследования этой проблемы, начиная с работ Ф. Бесселя, не потеряла своей актуальности. Это связано с непрерывным повышением требований к точности ее решения, особенно на большие расстояния, которая должна быть соизмерима с точностью современных методов геодезических измерений [1].

Предлагается достаточно простой итерационный алгоритм решения ОГЗ для любых расстояний, вплоть до 20 000 км, основанный на решении прямой геодезической задачи каким-либо аналитическим или численным методом. В этом случае точность решения ОГЗ в области сходимости алгоритма полностью определяется точностью выбранного метода решения прямой геодезической задачи.

В статье использован алгоритм численного решения прямой геодезической задачи методом Рунге-Кутта-Фельберга RKF45 4-го и 5-го порядков, обеспечивающий субмиллиметровую точность вычисления для расстояний в диапазоне 0–20 000 км.

Для иллюстрации предложенного метода приведены два примера решения ОГЗ на большие расстояния и выполнено его сравнение по точности с последними модификациями способа Бесселя.

Алгоритм метода итераций

Процесс итерации строится следующим образом.

1. В начальной точке P_1 задают приближенные значения длины геодезической линии $S^{(0)}$ и азимута ее направления $A_{12}^{(0)}$, полученные, например, из аналитического решения ОГЗ на сфере.

2. Решая прямую геодезическую задачу на эллипсоиде, находят приближенные координаты B_2', L_2' конечной точки P_2' (рис. 1).

3. Считая сфероидический треугольник $P_1P_2P_2'$ узким, вычисляют:

— длину q и азимут A_{22}' стороны P_2P_2' по координатам точек P_2, P_2';

— угол θ, равный разности азимутов сторон $P_2'P_2$ и $P_2'P_1$ в точке P_2': $\theta = A_{22}' - A_{21}'$;

— угол ΔA в точке P_1: $\Delta A = arcsin(q/S')$.

4. В малом сфероидическом треугольнике $P_2P_2'Q$, считая его

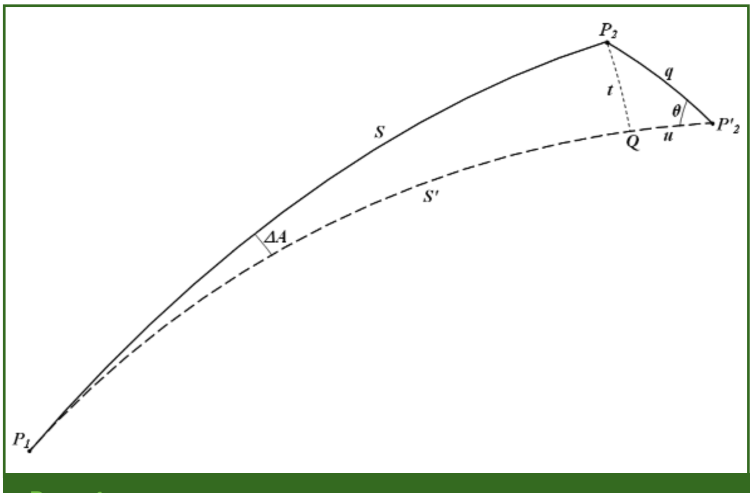

Рис. 1
Геометрические соотношения метода итераций на сфероиде

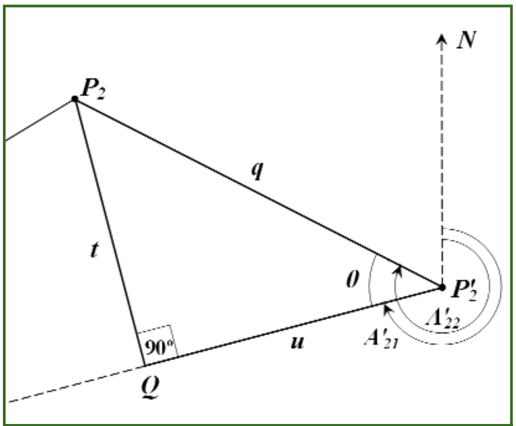

Рис. 2
Решение малого сферического треугольника в плоском приближении

плоским (рис. 2), вычисляют сторону ΔS: $\Delta S = q\cos\theta$.

5. Корректируют в первом приближении длину геодезической линии S и ее азимут A_{12} в начальной точке: $S^{(1)} = S^{(0)} + \Delta S^{(1)}$, $A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(0)} + \Delta A^{(1)}$.

6. С исправленными значениями длины $S^{(1)}$ и азимута $A_{12}^{(1)}$ геодезической линии решают прямую геодезическую задачу и находят координаты конечной точки P_2 во втором приближении.

Процесс итераций повторяют до тех пор, пока расхождение между вычисленными и заданными координатами конечной точки, равное длине стороны q, не станет меньше наперед заданной достаточно малой величины ε, например, 0,0001 мм.

Численные эксперименты показали, что в большинстве случаев рассмотренный выше алгоритм обеспечивает сходимость итерационного процесса за 5–10 приближений.

Решение прямой геодезической задачи методом численного интегрирования

Дифференциальные соотношения, связывающие производные широты, долготы и азимута по длине геодезической линии, имеют вид:

$$dB/dS = \cos A/M;$$
$$dL/dS = \sin A/N\cos B;$$
$$dA/dS = \sin A \,\mathrm{tg} B/N, \qquad (1)$$

где $M = a(1 - e^2)/W^3$, $N = a/W$, $W = \sqrt{1 - e^2\sin^2 B}$ — функции большой полуоси a и эксцентриситета e эллипсоида вращения.

Выражения (1) — это система трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных B, L, A, которая может быть решена стандартными методами численного интегрирования дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши). Принимая в начальной точке $S = 0$: $B_1 = B(0)$, $L_1 = L(0)$, $A_{12} = A(0)$ и интегрируя уравнения (1) до заданного значения S, находят значения широты, долготы и обратного азимута в конечной точке: $B_2 = B(S)$, $L_2 = B(S)$, $A_{21} = A(S)$, которые являются искомым решением прямой геодезической задачи.

Программная реализация алгоритма решения прямой геодезической задачи была выполнена на языке Fortran77 на основе метода численного интегрирования дифференциальных уравнений Рунге-Кутта-Фельберга RKF45 4-го и 5-го порядков [2].

Численные эксперименты: сравнение результатов решения со способом Бесселя

Результаты решения ОГЗ для больших расстояний (~20 000 км) итерационным методом сравнивались с результатами, полученными способом Бесселя [3] и способом Бесселя в модификации T. Vincenty [4]. В качестве начального приближения принимались значения начального азимута и длины геодезической линии, полученные из аналитического решения ОГЗ на сфере. Процесс итераций заканчивался при достижении условия $|q| \le 10^{-8}$.

В табл. 1 приведены результаты сравнения решения ОГЗ на примере из монографии В.П. Морозова [3, табл.10].

Исходные данные:

$B_1 = 45°0'0{,}0''$, $L_1 = 0°0'0{,}0''$,
$B_2 = -45°12'54{,}2680''$,
$L_2 = -173°23'06{,}8711''$.

Исходные данные для второго примера смоделированы с использованием программы решения прямой геодезической задачи Forward [5] с начальными данными:

$B_1 = -45°0'0{,}0''$, $L_1 = 0°0'0{,}0''$,
$A_{12} = 5°0'0{,}0''$, $S = 20\,000\,000{,}0$ м.

Прямая и обратная задачи решались дважды — на эллипсоиде WGS–84 и на эллипсоиде Красовского.

В результате решения прямой задачи получены геодезические координаты второй точки и обратный азимут геодезической линии:

— на эллипсоиде WGS–84:
$B_2 = 45°02'02{,}74279''$,
$L_2 = 179°57'30{,}84749''$,
$A_{21} = 354°59'49{,}2879''$;

Сравнение результатов решения ОГЗ — **Таблица 1**

Параметр	Способ Бесселя [4]	Метод итераций	Разность
S, м	19 499 999,99	19 500 000,00	–0,01
A_{12}	265°00'00,001"	265°00'00,002"	–0,001"
A_{21}	90°36'47,710"	90°36'47,709"	0,001"

Сравнение результатов решения ОГЗ на эллипсоиде WGS–84 — **Таблица 2**

Параметр	Способ Бесселя [5]	Метод итераций	Разность
S, м	20 000 000,0001	20 000 000,0002	–0,0001
A_{12}	4°59'59,9995"	4°59"59,9996"	–0,0001"
A_{21}	354°59'49,2884"	354°59'49,2883"	0,0001"

Сравнение результатов решения ОГЗ на эллипсоиде Красовского **Таблица 3**

Параметр	Способ Бесселя [5]	Метод итераций	Разность
S, м	19 999 999,9999	19 999 999,9999	0,0000
A_{12}	5°00′0,0004″	5°00′0,0005″	–0,0001″
A_{21}	354°59′48,3191″	354°59′48,3191″	0,0000″

— на эллипсоиде Красовского:

B_2 = 45°02′13,82707″,

L_2 = 179°57′29,49817″,

A_{21} = 354°59′48,3196″.

В табл. 2 и 3 приведены результаты сравнения решения ОГЗ на эллипсоиде WGS–84 и эллипсоиде Красовского способом Бесселя в модификации T. Vincenty и итерационным методом. В обоих случаях для достижения заданного уровня точности 10^{-8} м потребовалось восемь итераций.

Таким образом, предложен простой итерационный метод решения ОГЗ на эллипсоиде вращения на основе решения прямой геодезической задачи на любые расстояния, вплоть до 20 000 км.

Точность решения ОГЗ определяется точностью выбранного метода решения прямой геодезической задачи.

Необходимую для практики субмиллиметровую точность решения прямой геодезической задачи обеспечивает метод численного интегрирования Рунге-Кутта-Фельберга RKF45 4-го и 5-го порядка.

На численных примерах показано, что точность решения итерационным методом на расстояниях, близких к предельным (~20 000 км), не уступает по точности аналитическому решению модифицированным способом Бесселя.

Список литературы

1. Медведев П.А. Теория и методология повышения эффективности и точности решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида и в пространстве: Автореф. дисс. докт. техн. наук. — Омск, 2011. — 426 с.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
3. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1979. — 296 с.
4. Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodetics on the ellipsoid with application of nested equations. Survey Review (UK). — Vol. XXII. — No. 176, April 1975. — P. 88–93.
5. www.ngs.noaa.gov/PC_PROD/Inv_Fwd/index.shtml.

RESUME

A simple iteration technique is offered to solve the inverse geodetic task on the assumed spheroid based on solving the direct geodetic task for an arbitrary distance up to 20,000 km.