Публикуется редакцией журнала «Геопрофи» в авторском варианте
www.geoprofi.ru (14.07.2014 г.)

Геодезические задачи на эллипсоидах систем координат ПЗ-90.11 и ГСК-2011

А.П. Герасимов («27 ЦНИИ» Минобороны России).
В 1966 г. окончил Военно-инженерную академию им. В.В. Куйбышева. В настоящее время ведущий научный сотрудник ФГКУ «27 ЦНИИ» Минобороны России. Кандидат технических наук. Лауреат премии им. Ф.Н. Красовского.

П.А. Герасимов («27 ЦНИИ» Минобороны России).
В 1989 г. окончил Ленинградское высшее военно-топографическое командное училище. В настоящее время старший научный сотрудник ФГКУ «27 ЦНИИ» Минобороны России.

И.Н. Пчелин («27 ЦНИИ» Минобороны России).
В 2003 г. окончил Военно-инженерный университет (филиал г. Санкт-Петербург). В настоящее время научный сотрудник ФГКУ «27 ЦНИИ» Минобороны России.

Контактная информация
E-mail: info@geoprofi.ru

Резюме
Авторами приводится алгоритм решения прямой и обратной геодезической задачи по способу Бесселя для эллипсоидов ГСК-2011 и ПЗ-90.11. Отмечается, что при вычислении по приведенным алгоритмам расхождения результатов прямой и обратной задач не превышают 1 мм в координатах и длине геодезической линии и $0,001''$ в азимутах.

Abstract
Authors give algorithm of the solution of a straight line and the return geodetic task of a way of Bessel for GSK-2011 and PZ-90.11 ellipsoids. It is noted that at calculation on the given algorithms of a divergence of results of direct and return tasks don't exceed 1 mm in coordinates and length of the geodetic line and $0,001''$ in azimuths.

Постановлением Правительства Российской Федерации «О единых государственных системах координат» от 28 декабря 2012 г. № 1463 установлены следующие государственные системы координат:

геодезическая система координат 2011 года (ГСК-2011) – для использования при осуществлении геодезических и картографических работ;

общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) – для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

Для системы координат ГСК-2011 постановлением Правительства № 1463 установлен эллипсоид с параметрами:

большая полуось $a =$6 378 136,5 м; сжатие $\alpha = 1:298,2564151$.

Большой полуоси a и сжатию α соответствуют:

малая полуось $b =$6 356 751,758 м;

квадрат эксцентриситета $e^2 =$0, 006 694 3981;

квадрат второго эксцентриситета $e'^2 =$0,006 739 5151.

Параметрами эллипсоида системы ПЗ-90.11 являются:

$a = 6\ 378\ 136{,}0$ м; $\alpha = 1:298{,}25784;$ $b = 6\ 356\ 751{,}36$ м;

$e^2 = 0{,}006\ 694\ 3662$; $e'^2 = 0{,}006\ 739\ 4828$.

Алгоритм решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя для любого эллипсоида дан в книге $\left[1\right]$. Приведем его для эллипсоидов ГСК-2011 и ПЗ-90.11.

1. Вычисление приведенной широты u начальной точки

$$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}, \quad \sin u_1 = \frac{\sin B_1 \sqrt{1-e^2}}{W_1}, \quad \cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1}.$$

2. Вычисление вспомогательных функций

$$\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1, \quad \mathrm{ctg}\,\sigma_1 = \frac{\cos u_1 \cos A_1}{\sin u_1}, \quad \cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0,$$

$$\sin 2\sigma_1 = \frac{2\,\mathrm{ctg}\,\sigma_1}{\mathrm{ctg}^2\sigma_1 + 1}, \quad \cos 2\sigma_1 = \frac{\mathrm{ctg}^2\sigma_1 - 1}{\mathrm{ctg}^2\sigma_1 + 1}.$$

3. Вычисление коэффициентов A, B, C, α, β по формулам:

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0;$$

$$A = b\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right); \qquad B = b\left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024}k^6\right);$$

$$C = b\left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6\right);$$

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16}\right) - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\right)\cos^2 A_0 + \frac{3}{128}e^6 \cos^4 A_0;$$

$$\beta = \left(\frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{32}\right)\cos^2 A_0 - \frac{e^6}{64}\cos^4 A_0.$$

По этим формулам коэффициенты α, β вычисляются в радианах, а для дальнейшего использования переводятся в секунды.

Для эллипсоида ГСК-2011 формулы коэффициентов имеет такой вид:

$$k^2 = 0{,}006\ 739\ 5151 \cos^2 A_0;$$

$$A = 6\ 356\ 751{,}758\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right);$$

$$B = 6\ 356\ 751{,}758\left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024}k^6\right); \quad C = 6356751{,}758\left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6\right);$$

$$\alpha = 691'',568700 - 0'',581601 \cos^2 A_0 + 0'',001450 \cos^4 A_0;$$

$$\beta = 0'',290801 \cos^2 A_0 - 0'',000967 \cos^4 A_0.$$

Для эллипсоида ПЗ-90.11 коэффициенты вычисляются по формулам:

$$k^2 = 0{,}006\ 739\ 4828 \cos^2 A_0;$$

$$A = 6\ 356\ 751{,}36\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right);$$

$$B = 6\ 356\ 751{,}36\left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024}k^6\right); \quad C = 6356751{,}36\left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6\right);$$

$$\alpha = 691'',565399 - 0'',581594\cos^2 A_0 + 0'',001450\cos^4 A_0;$$

$$\beta = 0'',290798\cos^2 A_0 - 0'',000967\cos^4 A_0.$$

4. Вычисление сферического расстояния

$$\sigma_0 = \left[s - \left(B + C\cos 2\sigma_1\right)\sin 2\sigma_1\right]\frac{1}{A};$$

$$\sin 2\left(\sigma_1 + \sigma_0\right) = \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 + \cos 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0;$$

$$\cos 2\left(\sigma_1 + \sigma_0\right) = \cos 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 - \sin 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0;$$

$$\sigma = \sigma_0 + \left[B + 5C\cos 2\left(\sigma_1 + \sigma_0\right)\right]\frac{\sin 2\left(\sigma_1 + \sigma_0\right)}{A}.$$

5. Вычисление поправки в разность долгот

$$\lambda - l = \delta = \left\{\alpha\sigma + \beta\left[\sin 2\left(\sigma_1 + \sigma_0\right) - \sin 2\sigma_1\right]\right\}\sin A_0.$$

6. Вычисление геодезических координат и азимута в конечной точке

$$\sin u_2 = \sin u_1 \cos\sigma + \cos u_1 \cos A_1 \sin\sigma,$$

$$B_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin u_2}{\sqrt{1 - e^2}\sqrt{1 - \sin^2 u_2}}\right],$$

$$\lambda = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin A_1 \sin\sigma}{\cos u_1 \cos\sigma - \sin u_1 \sin\sigma \cos A_1}\right].$$

знак $\sin A_1$	$+$	$+$	$-$	$-$
знак $\operatorname{tg}\lambda$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\lambda =$	$\lvert\lambda\rvert$	$180^\circ - \lvert\lambda\rvert$	$-\lvert\lambda\rvert$	$\lvert\lambda\rvert - 180^\circ$

$$L_2 = L_1 + \lambda - \delta,$$

$$A_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\cos u_1 \sin A_1}{\cos u_1 \cos\sigma \cos A_1 - \sin u_1 \sin\sigma}\right].$$

знак $\sin A_1$	$-$	$-$	$+$	$+$
знак $\operatorname{tg}A_2$	$+$	$-$	$+$	$-$
$A_2 =$	$\lvert A_2\rvert$	$180^\circ - \lvert A_2\rvert$	$180^\circ + \lvert A_2\rvert$	$360^\circ - \lvert A_2\rvert$

$\lvert\lambda\rvert$, $\lvert A_2\rvert -$ углы в первой четверти.

Алгоритм решения обратной геодезической задачи по способу Бесселя напишем на основании формул, которые опубликованы в работах $[1]$ и $[2.]$

1. Подготовительные вычисления

$$W_1 = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}, \qquad W_2 = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_2},$$

$$\sin u_1 = \frac{\sin B_1\sqrt{1-e^2}}{W_1}, \qquad \sin u_2 = \frac{\sin B_2\sqrt{1-e^2}}{W_2},$$

$$\cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1}, \qquad \cos u_2 = \frac{\cos B_2}{W_2}, \qquad l = L_2 - L_1,$$

$$a_1 = \sin u_1 \sin u_2, \qquad a_2 = \cos u_1 \cos u_2,$$

$$b_1 = \cos u_1 \sin u_2, \qquad b_2 = \sin u_1 \cos u_2.$$

Величина l вычисляется в радианах.

2. Совместное вычисление начального азимута, сферического расстояния и разности долгот последовательными приближениями

$$\lambda = l + \delta.$$

В первом приближении принимается $\delta = 0$ радиан.

$$p = \cos u_2 \sin\lambda, \qquad q = b_1 - b_2\cos\lambda, \qquad A_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right).$$

знак p	$+$	$+$	$-$	$-$
знак q	$+$	$-$	$-$	$+$
$A_1 =$	$\lvert A_1\rvert$	$180^\circ - \lvert A_1\rvert$	$180^\circ + \lvert A_1\rvert$	$360^\circ - \lvert A_1\rvert$

$$\sin\sigma = p\sin A_1 + q\cos A_1, \qquad \cos\sigma = a_1 + a_2\cos\lambda, \qquad \sigma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\right).$$

Знак $\cos\sigma$	$+$	$-$
$\sigma =$	$\lvert\sigma\rvert$	$180^\circ - \lvert\sigma\rvert$

$\lvert A_1\rvert$ и $\lvert\sigma\rvert$ – аргументы в первой четверти.

$$\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1; \quad \cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0; \quad x = 2a_1 - \cos^2 A_0 \cos\sigma;$$

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16}\right) - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\right)\cos^2 A_0 + \frac{3}{128} e^6 \cos^4 A_0;$$

$$\beta' = \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\right) - \frac{e^6}{32}\cos^2 A_0.$$

$$\delta = \left(\alpha\sigma - \beta' x \sin\sigma\right)\sin A_0.$$

Коэффициенты α, β' и величина δ вычисляются в радианах. Коэффициент β' для эллипсоидов ГСК-2011 и ПЗ-90.11 может вычисляться по формуле

$$\beta' = \left(28197 - 94\cos^2 A_0\right)10^{-10}.$$

С полученным значением δ повторяются все вычисления, начиная с пункта 2. Приближения продолжаются до тех пор, пока значение δ не будет отличаться от предыдущего его значения на величину не более $48 \cdot 10^{-11}$ $((0'',0001)$. Значения λ, A_1, σ, x и $\sin A_0$, полученные в последнем приближении, принимаются за окончательные.

3. Вычисление коэффициентов $A,\ B',\ C'$ и длины геодезической линии s.

Коэффициенты $A,\ B',\ C'$ вычисляются по формулам:

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0;$$

$$A = b\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right);$$

$$B' = b\left(\frac{e'^2}{4} - \frac{e'^4}{16}\cos^2 A_0 + \frac{15e'^6}{512}\cos^4 A_0\right);$$

$$C' = b\left(\frac{e'^4}{64} - \frac{3e'^6}{128}\right).$$

Для эллипсоида ГСК-2011 коэффициенты вычисляются по формулам

$$k^2 = 0{,}006\ 739\ 5151 \cos^2 A_0;$$

$$A = 6\ 356\ 751{,}758\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right);$$

$$B' = 6356751{,}758\left(\frac{e'^2}{4} - \frac{e'^4}{16}\cos^2 A_0 + \frac{15e'^6}{512}\cos^4 A_0\right);$$

$$C' = 6356751{,}758\left(\frac{e'^4}{64} - \frac{3e'^6}{128}\right).$$

Коэффициенты для эллипсоида ПЗ-90.11 вычисляются по формулам

$$k^2 = 0{,}006\ 739\ 4828 \cos^2 A_0;$$

$$A = 6\ 356\ 751{,}36\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6\right);$$

$$B' = 6356751{,}36\left(\frac{e'^2}{4} - \frac{e'^4}{16}\cos^2 A_0 + \frac{15e'^6}{512}\cos^4 A_0\right);$$

$$C' = 6356751{,}36\left(\frac{e'^4}{64} - \frac{3e'^6}{128}\right).$$

Длина геодезической линии s вычисляется по формулам:

$$y = \left(\cos^4 A_0 - 2x^2\right)\cos\sigma,$$

$$s = A\sigma + \left(B'x + C'y\right)\sin\sigma.$$

4. Вычисление обратного азимута

$$A_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos u_1 \sin\lambda}{b_1\cos\lambda - b_2}\right).$$

Квадрант A_2 определяют по тем же признакам, что и ранее вычисленное значение A_1, полагая, что числителю соответствует величина p, а знаменателю q.

При вычислении по приведенным алгоритмам расхождения результатов прямой и обратной задач не превышают 1 мм в координатах и длине геодезической линии и $0{,}001''$ в азимутах.

Список литературы

1. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. М., Недра, 1979, 296 с.

2. Морозов В.П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. Изд. ВИА, М., 1958.